

Un modèle modal réduit pour le calcul des transferts conductifs au sein d'une paroi de bâtiment

Yosr BOUKHRIS¹, Leila GHARBI, Nadia GHRAB-MORCOS

*Laboratoire Matériaux, Optimisation et Energie pour la Durabilité,
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), Université de Tunis El Manar,
B.P. 37, 1002 Tunis Belvédère, TUNISIE*
¹yosr.boukhris@gmail.com

Résumé— Nous avons développé un logiciel permettant d'étudier les flux de chaleur par conduction au sein d'une paroi de bâtiment, en régime dynamique. Notre choix s'est porté sur la méthode modale associée à une réduction par agrégation linéaire optimisée, permettant de simuler le comportement thermique réel de la paroi à l'aide d'un nombre réduit de paramètres tout en conservant un degré de précision satisfaisant, ce qui permet un gain conséquent en temps de calcul et en espace mémoire. Cette communication présente le modèle modal réduit que nous avons développé ainsi que sa validation par la comparaison de ses résultats avec ceux issus d'un autre code numérique.

Mots clés— Analyse modale; Réduction de modèles; Conduction.

I. INTRODUCTION

L'étude du comportement thermique dynamique d'une cellule d'habitation nécessite l'évaluation des transferts de chaleur par conduction au sein des parois. Un calcul rigoureux fait ainsi appel à des modèles mathématiques complets et par là même complexes dans leur mise en œuvre. C'est la raison pour laquelle, nous nous sommes orientés vers une approche modale associée à une réduction de modèles d'état. En effet, le choix de cette méthode nous permet d'étudier le comportement thermique dynamique de la paroi considérée avec un nombre réduit de paramètres, tout en reproduisant avec une précision satisfaisante le comportement du système détaillé d'origine.

Après avoir réalisé la discrétisation spatiale par différences finies de l'équation de chaleur, la méthode modale permet de décomposer le champ de températures en une combinaison linéaire de modes propres intrinsèques à la paroi considérée. Le problème thermique est ainsi réécrit dans sa base modale. Dans une seconde étape, cette représentation modale est associée à une technique de réduction par agrégation linéaire optimisée, qui permet de réduire la taille du modèle aux quelques modes propres dominants.

L'évaluation du modèle modal sera illustrée par la comparaison de ses résultats avec ceux issus d'un autre code développé au CETHIL de l'INSA de Lyon.

II. MODELISATION DES ECHANGES CONDUCTIFS

Le transfert de chaleur par conduction à travers les parois du bâtiment satisfait à la loi de Fourier qui relie le gradient de température en un point M de la paroi à l'instant t, à la densité de flux thermique φ_c en ce point et au même instant :

$$\varphi_c(M, t) = -\lambda(M, t) \overline{\text{grad}} T(M, t) \quad (1)$$

avec:

$\lambda(M, t)$ la conductivité thermique du matériau au point M, à l'instant t (W/m.K)

$T(M, t)$ la température de la paroi au point M, à l'instant t (K)

En raison de l'intervalle limité des températures auxquelles sont soumis les bâtiments, les propriétés thermo-physiques des matériaux constituant les parois seront considérées homogènes et invariantes dans le temps.

En tenant compte de cette hypothèse, l'équation de diffusion de la chaleur au sein de la paroi peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\lambda(M) \Delta T(M, t) + P(M) = \rho(M) c(M) \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \quad (2)$$

avec:

$\rho(M)$ la masse volumique du matériau (kg/m³)

$c(M)$ la chaleur massique du matériau (J/kg.K)

P la puissance volumique interne de chaleur dans le matériau (W/m³)

t le temps (s)

Pour simplifier cette équation, nous considérons le cas où le transfert conductif au sein de la paroi s'effectue de manière unidirectionnelle et nous négligeons les sources de chaleur internes dans les parois. L'équation de la chaleur se réduit à :

$$\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

L'équation (3) est relativement difficile à résoudre. En effet, la résolution analytique pure d'une telle équation s'effectue par la méthode de séparation des variables. Elle conduit au calcul de fonctions dépendantes du temps et des variables d'espace. Ces fonctions, de forme intégrale, aboutissent à mettre la solution sous forme d'une série infinie. Cependant la résolution numérique conduit à tronquer cette série, il est ainsi possible d'aboutir directement à une expression de type série finie en utilisant un mode d'approximation d'usage courant en physique: la discrétisation.

* Discrétisation spatiale des échanges thermiques

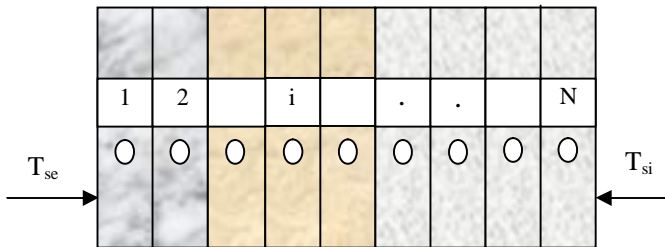


Fig. 1 Discrétisation spatiale d'une paroi multicouche en différences finies

La discrétisation spatiale d'une paroi multicouche sur un maillage de N nœuds permet d'aboutir à la description du système par l'équation matricielle (4), appelé aussi équation d'état du système:

$$[C] \frac{d\vec{T}}{dt} = [A]\vec{T}(t) + [D]\vec{U}(t) \quad (4)$$

avec:

- $\vec{T}(t)$ le vecteur approximation du champ de température, qui a pour composantes les N valeurs des températures T_i aux différents points i de la discrétisation spatiale.
- [C] une matrice carrée de dimensions (N x N), dont les éléments sont les valeurs des capacités calorifiques associées à la maille entourant chaque nœud. Elle est diagonale définie positive.
- [A] la matrice carrée de dimensions (N x N), qui traduit les échanges thermiques entre les différents éléments constituant la paroi. En raison de la propriété de réciprocité, cette matrice est symétrique.

$\vec{U}(t)$ le vecteur qui regroupe les M sollicitations agissant sur les frontières de la paroi.

[D] la matrice rectangulaire de dimensions (N x M) qui relie les M sollicitations aux N éléments du maillage.

En réalité, on peut ne s'intéresser qu'à l'évolution de quelques sorties « mesures » regroupées dans un vecteur $\vec{Y}(t)$ de dimension K, écrit sous la forme de l'équation d'observation suivante:

$$\vec{Y}(t) = [E]\vec{T}(t) + [G]\vec{U}(t) \quad (5)$$

avec:

- [E] matrice d'observation, de dimensions (K x N)
- [G] matrice de transmission directe, de dimensions (K x M)

La résolution de l'équation matricielle (4) et par conséquent la détermination des sorties du système (Eq 5) peut être effectuée à l'aide de méthodes classiques telles que les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta, ... Or, ces techniques sont lourdes et rendent difficile l'analyse du système en raison du nombre important de paramètres. De plus, pour des systèmes dont la discrétisation spatiale engendre un nombre de nœuds important, ces méthodes ne peuvent être raisonnablement utilisées que si l'on dispose d'une puissance de calcul suffisante. Il est également possible d'effectuer une discrétisation temporelle et une intégration de l'équation (4) qui conduit à l'utilisation des exponentielles de matrices. Cependant pour résoudre ce problème complexe de manière plus aisée, nous avons opté pour la méthode modale qui possède plusieurs avantages et dont la description fait l'objet du paragraphe suivant.

A. Principe de la méthode d'analyse modale

La méthode modale est un outil classique utilisé en dynamique des systèmes élastiques et en mécanique vibratoire. Elle consiste à rechercher les modes vibratoires stationnaires des structures élastiques. En effet, tout système linéaire possède des modes propres de vibrations, chacun d'eux contribuant au mouvement. Ces modes de vibrations sont intrinsèques au système car ils correspondent à ses dimensions spécifiques, ses composantes structurelles et ses conditions aux limites.

Cette méthode a été initiée dans le domaine de la thermique par Bacot, Sicard et Neveu ([1], [2] et [3]). La diagonalisation du système algébrique matriciel (Eq 4) décrivant les échanges conductifs à travers une paroi permet d'obtenir les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) qui sont des caractéristiques intrinsèques du système. A chaque couple d'éléments propres, on associe de façon conceptuelle, un paramètre appelé mode propre. On définit par la suite, pour chaque mode propre, une constante de temps (inverse en

valeur absolue de la valeur propre) qui précise l'impact temporel des contributions respectives des différents modes sur l'évolution dynamique de la paroi.

Les constantes de temps sont des paramètres intrinsèques au système, elles sont totalement indépendantes des sollicitations et sont donc calculées une seule fois pour un bâtiment donné ce qui représente un avantage très important de l'analyse modale.

Les systèmes thermiques auxquels s'applique le formalisme d'état modal doivent vérifier trois conditions: la linéarité, l'invariance et la réciprocité.

La réécriture de l'équation d'état (4) par l'analyse modale permet de découpler les N équations différentielles élémentaires et de séparer les variables d'espace et de temps. En effet, l'expression du modèle d'évolution thermique du système se simplifie nettement en faisant passer le vecteur d'état $\bar{T}(t)$ de la base physique initiale à la base modale :

$$\bar{T}(t) = [P]\bar{X}(t) \quad (6)$$

avec:

[P] la matrice de passage, de dimensions (N x N), du champ des températures de la base physique à la base modale. Elle est formée par les N vecteurs propres de $[C]^{-1}[A]$, disposés en colonnes.

$\bar{X}(t)$ le vecteur de dimension N, représentant l'état thermique du bâtiment dans la base modale. Il n'a pas de sens physique particulier.

Les vecteurs propres forment la base modale, ils doivent donc être linéairement indépendants. Ils sont orthonormés par rapport à la matrice des capacités thermiques [C], qui est la matrice « poids » du système. Cette normalisation implique que:

$$[P]^t [C] [P] = [I] \quad (7)$$

Ou encore :

$$[P]^{-1} = [P]^t [C] \quad (8)$$

La normalisation par rapport à la matrice des capacités [C] permet de calculer directement la matrice $[P]^{-1}$ sans avoir à effectuer d'inversion de matrice. Cette méthode devient très intéressante lorsque la taille du système est grande, car le calcul de la matrice transposée est immédiat et de plus non entaché d'inévitables erreurs numériques.

Le modèle obtenu est appelé modèle modal, il est représenté par les équations suivantes:

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = [W]\bar{X}(t) + [B]\bar{U}(t) \quad (9)$$

$$\bar{Y}(t) = [H]\bar{X}(t) + [S]\bar{U}(t) \quad (10)$$

avec:

$$[W] = [P]^{-1} [C]^{-1} [A] [P] \text{ et } [B] = [P]^{-1} [C]^{-1} [D]$$

$$[H] = [E] [P] \text{ et } [S] = [G]$$

[W] est une matrice diagonale de dimensions (N x N), dont les éléments sont les valeurs propres λ_n de $[C]^{-1}[A]$.

[B] représente la matrice de commande dans la base modale de dimensions (N x M).

[H] est la matrice d'observation dans la base modale de dimensions (K x N)

[S] est la matrice de transmission directe de dimensions (K x M)

L'application de la représentation modale permet de définir le comportement thermique du système dans le régime variable par l'intermédiaire du quadruplet de matrices ([W], [B], [H], [S]) appelé estimateur complet du système « entrées-sorties ».

B. Réduction du modèle modal par agrégation linéaire optimisée

Un autre avantage offert par la méthode d'analyse modale est la possibilité de la coupler à une technique de réduction de modèles.

Le principe de la réduction est de déterminer, à partir du modèle d'état d'ordre N (Eqs 9 et 10), un modèle de dimension $N_r \ll N$, du type :

$$\frac{d\bar{X}_r(t)}{dt} = [W_r]\bar{X}_r(t) + [B_r]\bar{U}(t) \quad (11)$$

$$\bar{Y}(t) = [H_r]\bar{X}_r(t) + [S_r]\bar{U}(t) \quad (12)$$

Les qualités que nous attendons de ce nouveau modèle sont les suivantes :

- une approximation satisfaisante du vecteur des sorties : $\bar{Y}(t) \cong \bar{Y}_r(t)$,
- un régime permanent identique à celui établi par le modèle initial,
- un gain de temps de calcul et/ou d'espace mémoire.

Il existe plusieurs méthodes de réduction; leur diversité témoigne de la difficulté à condenser toute l'information thermique dans un nombre restreint de paramètres variables. Notre intérêt s'est porté sur la méthode d'agrégation linéaire optimisée qui est une technique mixte de réduction. Le critère de sélection des modes propres à retenir est fonction de la dominance énergétique relativement à un signal. La méthode d'agrégation linéaire optimisée étudie l'écart entre l'état du

système à un instant t et son état asymptotique instantané $|\bar{Y}(t) - \bar{Y}(\infty)|$, pour des sollicitations du type échelon ou impulsion, dont l'effet est observé sur toutes les sorties du modèle d'une matrice globale [4].

Outre le fait que les performances de la méthode d'agrégation linéaire ont été mises en évidence par plusieurs auteurs tels que [4], [5], [6] ..., cette méthode de réduction permet d'obtenir des modes sélectionnés sur un critère ayant une meilleure signification physique.

Par ailleurs, cette méthode se distingue par sa simplicité de sa mise en œuvre puisqu'elle consiste à imposer, entre les vecteurs d'état $\bar{X}(t)$ du modèle modal complet de dimension N et $\bar{X}_r(t)$ du modèle modal réduit de dimension N_r , une relation linéaire de projection définie par:

$$\bar{X}_r(t) = [L] \bar{X}(t) \quad (13)$$

où $[L]$ est la matrice rectangulaire d'agrégation, de dimensions $(N_r \times N)$, ne contenant que des 0 et des 1.

L'existence d'une relation d'agrégation est assurée si et seulement si :

$$[W_r] [L] = [L] [W] \quad (14)$$

$$[B_r] = [L] [B] \quad (15)$$

$$\bar{X}_r(0) = [L] \bar{X}(0) \quad (16)$$

La démarche de réduction s'effectue en deux étapes. Dans la première, on sélectionne les N_r modes dominants selon le critère « énergétique » permettant de définir $[L]$, et on détermine par la suite les matrices réduites $[W_r]$ et $[B_r]$ de l'équation d'état: N_r étant le nombre de modes propres dominants qui apportent 96% de la réponse du bâtiment.

Dans la seconde étape, nous calculons les termes des matrices $[H_r]$ et $[S_r]$ de l'équation d'observation (12), par la minimisation d'un écart quadratique au niveau de l'observation et la préservation d'un régime permanent identique à celui du modèle complet:

$$[H_r] = ([H][SS][L]^t)([L][SS][L])^{-1} \quad (17)$$

$[SS]$ est issue du calcul du critère J relatif à la norme de Shur¹ de l'écart $[\Delta Y]$ entre les réponses du système en régime dynamique et en régime permanent glissant, elle est de dimensions $(N \times N)$.

$$J = \int_0^{\infty} \|\Delta Y\|_{shur}^2 dt = \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \Delta Y^2(k, m) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \text{tr}([\Delta Y]^t [\Delta Y]) dt = \int_0^{\infty} \text{tr}([\Delta Y] [\Delta Y]^t) dt$$

La matrice de transmission directe $[S_r]$ s'obtient en écrivant la conservation des régimes statiques entre le modèle complet et le modèle réduit :

$$[S_r] = [S] - ([H] - [H_r])[L][W]^{-1}[B] \quad (18)$$

Le modèle réduit se trouve ainsi défini par ses quatre matrices ($[W_r]$, $[B_r]$, $[H_r]$, $[S_r]$) qu'on appelle estimateur thermique réduit.

III. EVALUATION DU MODELE: APPLICATION AU CAS D'UNE PAROI DE BÂTIMENT

Le modèle conductif que nous avons développé, est basé sur la méthode modale et réduit par la méthode d'agrégation linéaire optimisée. Afin d'évaluer notre modèle, nous comparons ses résultats avec ceux obtenus par le modèle de J.J. Roux développé au CETHIL de l'INSA de Lyon [7].

Dans ce qui suit, nous étudions le cas d'une paroi composée de deux couches : Béton banché (1) + Isolant (2) (Fig. 2).

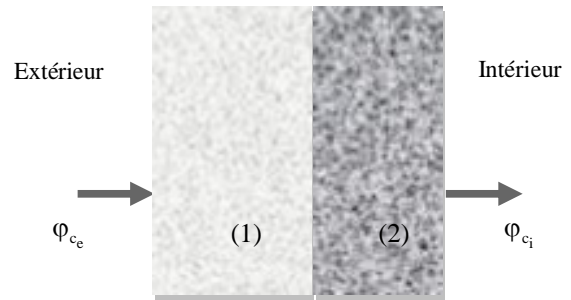


Fig. 2 Description de la paroi étudiée

Les propriétés thermo-physiques des matériaux dont elle est constituée figurent dans le tableau 1.

Tableau 1 Propriétés thermo-physiques de la paroi étudiée

	Banche	Isolant
Epaisseur (m)	0.12	0.1
Conductivité (W/m.K)	1.75	0.04
Diffusivité (m ² /s)	0.793 E-06	0.497 E-06
Nombre de nœuds	4	2

Les sollicitations en températures d'ambiance sont de type échelon sur la face en contact avec l'extérieur, l'autre face en contact avec l'intérieur étant maintenue à 0°C.

Les constantes de temps obtenues par notre modèle conductif ainsi que ceux données par le modèle de Roux [7] sont représentées dans le tableau 2.

Tableau 2 Constantes de temps associées aux modèles complets

Mode	Modèle "Roux"	Notre modèle
1	7493.07791588	7489.43837377
2	2495.34293242	2495.29827927
3	1265.62142368	1265.60732479
4	906.41627822	905.96821472
5	409.854320521	409.64767701
6	295.062102109	294.91327228

Nous constatons que nos résultats concordent avec ceux donnés par le modèle de Roux.

Le tableau 3 présente les résultats en densité de flux (extérieur et intérieur) obtenus par notre modèle complet ainsi que par celui de Roux, sans réduction. On constate que les densités de flux obtenues par les deux modèles sont très proches.

Tableau 3 Réponses en flux données par les modèles complets

Temps (h)	Modèle "Roux"		Notre modèle	
	Φ_{c_e} (W/m ²)	Φ_{c_i} (W/m ²)	Φ_{c_e} (W/m ²)	Φ_{c_i} (W/m ²)
1	18.599	0.015	18.593	0.016
2	11.223	0.098	11.218	0.098
3	7.063	0.192	7.058	0.192
4	4.512	0.263	4.508	0.263
5	2.938	0.310	2.935	0.310
6	1.966	0.340	1.963	0.340
7	1.364	0.359	1.363	0.359
8	0.992	0.370	0.991	0.371
9	0.762	0.378	0.761	0.378
10	0.620	0.382	0.619	0.382
11	0.532	0.385	0.532	0.385
12	0.478	0.387	0.477	0.387
13	0.444	0.388	0.444	0.388
14	0.423	0.388	0.423	0.388
15	0.410	0.389	0.410	0.389
16	0.402	0.389	0.402	0.389
17	0.397	0.389	0.397	0.389
18	0.394	0.389	0.394	0.389
19	0.392	0.389	0.392	0.389
20	0.391	0.389	0.391	0.389

Nous avons appliqué la méthode d'agrégation linéaire optimisée à notre modèle complet constitué initialement de 6 modes, qui a ainsi été réduit à 3 modes dominants. Les modes n°1, 4 et 5 sont les modes dominants (Tableau 4), avec une importance prépondérante du mode n°1 qui représente à lui seul 81.728% de « l'énergie totale ».

Tableau 4. Contributions énergétiques des modes dominants du modèle réduit d'ordre 3

Mode	Constante de temps (s)	"Energie" [%]
1	7489.43837377	81.728
4	905.96821472	9.9618
5	409.64767701	4.7556
"Energie" totale retenue [%]		96.445

La figure 3 présente les réponses en densité de flux extérieur et intérieur obtenues par notre modèle complet (noté MC), ainsi que celles obtenues par notre modèle réduit (noté MR).

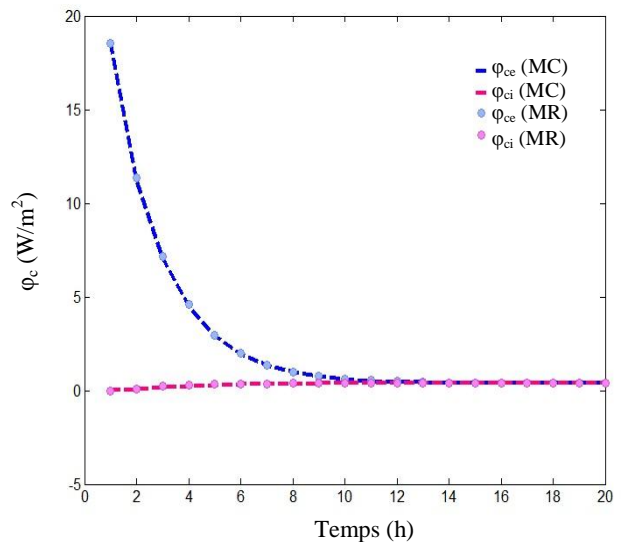


Fig. 3 Réponse en flux pour une entrée échelon unitaire

Nous remarquons que les résultats obtenus par les deux modèles sont en parfaite adéquation, ce qui dénote que la méthode modale associée à la réduction par agrégation linéaire optimisée permet de calculer le flux conductif traversant un élément de l'enveloppe du bâtiment tout en préservant la précision des résultats.

III. CONCLUSION

Nous avons présenté notre modèle modal développé pour le calcul des flux de chaleur conduits au sein d'une paroi de bâtiment. La confrontation des résultats obtenus avec ceux

issus d'un autre code numérique a permis de conclure la fiabilité du code développé. Un des avantages offerts par la méthode d'analyse modale est la possibilité de réduction du modèle considéré. Parmi les différentes approches de réduction de modèles trouvées dans la littérature, nous avons opté pour la méthode d'agrégation linéaire optimisée qui est une technique mixte de réduction. La comparaison des résultats en densité de flux au sein de la même paroi a montré que le modèle réduit fournit une réponse quasiment identique à celle que fournit le modèle complet. En effet, les modes propres qui n'ont pas été retenus, ont une influence négligeable sur l'évolution horaire de la réponse du système.

Ce logiciel nous permettra de constituer une bibliothèque de matrices réduites des parois couramment utilisées dans la maçonnerie tunisienne.

REFERENCES

- [1] P. Bacot. Analyse modale des systèmes thermiques. Thèse de Doctorat : Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 1984.
- [2] P. Bacot, A. Neveu, J. Sicard. Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment. *Revue Générale de Thermique* 1984; 267.
- [3] J. Sicard. Analyse modale appliqué à la thermique- Fondements analytiques et applications au bâtiment. Thèse de Doctorat : Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 1984.
- [4] A. ElBiyalli. Réduction des systèmes complexes multi-entrées multi-sorties. Application aux singularités thermiques dans les bâtiments. Thèse de Doctorat: Université Abdelmalek Essaadi, Faculté des Sciences de Tetouan, 1950.
- [5] R. Morlot. Contribution au développement de méthodes de réduction de systèmes thermiques complexes: Application aux planchers rayonnants électriques posés sur terre-plein . Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.
- [6] C. Menezo. Contribution à la modélisation du comportement thermique des bâtiments par couplage de modèles réduits. Thèse de Doctorat: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.
- [7] J.J. Roux. Modélisation du comportement thermique et aéralique des bâtiments: sous-structuration, réduction et méthodes de couplage. Habilitation à diriger des recherches: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1993.